Tens-Mvd2011 – IV Simposio Latinoamericano de Tensoestructuras
Montevideo, Uruguay, 6 – 8 Abril 2011

NUEVAS ESTRATEGIAS EN "BÚSQUEDA DE FORMA" PARA ESTRUCTURAS TENSADAS.

Francisco Pantano [1]
[1]Uni-Systems, LLC - 4600 Lake Road - Minneapolis, MN 55422
fpantano@uni-systems.com

1. Abstracto

Hace bastante tiempo que el mundo de las estructuras esta focalizando cada vez mas su atención en la tipología de estructuras tensadas para la resolución de problemas en los que la relación peso-envergadura deba ser minimizada.

Ya son varios los ejemplos de puentes, cubiertas y fachadas que están revolucionando el mundo de la ingeniería estructural.

Con el desarrollo de las computadoras y con la aparición de cada vez mas programas y métodos numéricos, hoy en día se puede abordar el problema de búsqueda de forma utilizando diferentes estrategias.

En la presente ponencia se desarrolla un método genérico de resolución del problema de búsqueda de forma en estructuras compuesta por elementos lineales trabajando solo a axil.

2. Palabras claves

Búsqueda de forma, estructuras tensadas, rigidez geométrica, densidad de fuerza, Newton-Raphson, ecuación de forma.

3. Introducción

Dese que el mundo de la ingeniería resolviera el problema de soportar estructuras de grandes luces utilizando elementos lineales trabajando a tracción (cables), la disciplina ingenieril no ha parado en su empeño de buscar soluciones conceptuales que consigan un máximo aprovechamiento de las propiedades mecánicas de los materiales que componen los elementos estructurales.

Las estructuras tensadas de cables nos permiten resolver elegantemente diferente tipos de problemas estructurales en los que la reducción del peso total de la estructura es un parámetro importante a considerar.

La esbeltez de las soluciones alcanzadas nos sorprende cada día más, con nuevas formas que desafían a la gravedad y hacen más atractivo para el mundo arquitectónico el disponer de herramientas que faciliten la implantación de este estilo en los diseños cotidianos.

Desde antes de que existieran las computadoras ya se desarrollaron métodos gráficos y simplificaciones numéricas que garantizaban, con bastante certeza, la viabilidad del diseño de estructuras tensadas. La limitación en la capacidad de resolver problemas complejos hacia bastante evidente la solución final, con estructuras de puentes atirantados y colgantes como máximo exponente.

Posteriormente, con simplificaciones numéricas elementales se consiguieron grandes resultados, como el caso del Estadio Olímpico de Munich. Una estructura diseñada a base de una red de cables que componen una malla ortogonal de contorno irregular y una serie de tirantes que concentran las cargas llevándolas hasta la cimentación.

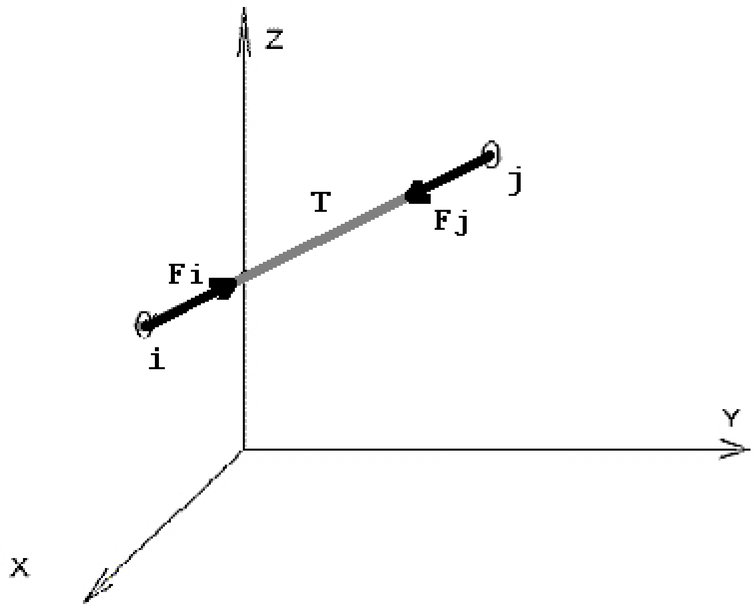
Pero no fue hasta que aparecieron las computadoras cuando se han conseguido grandes logros en encontrar soluciones cada vez más compleja utilizando el sencillo concepto de elementos lineales trabajando a fuerza axil.

En su inicio el método de densidad de fuerza fue bastante exitoso en su aplicación ya que resuelve elegantemente el problema geométrico linearizando el sistema de ecuaciones y permitiendo una inmediata solución. Posteriormente se han ido utilizando los métodos de relajación dinámica y de elementos finitos, alterando ciertos parámetros, para conseguir aproximarse satisfactoriamente a los requerimientos del problema.

En la presente ponencia se explica el funcionamiento de un programa informático de búsqueda de forma que utiliza un principio más genérico en su formulación y por tanto permite abordar problemas complejos casi imposibles de resolver con técnicas tradicionales.

4. Desarrollo del método

El principio teórico de este método se basa en la formulación espacial de las fuerzas generadas por un elemento lineal sometido a fuerza axial.



$$Fi = (fxi\,,\, fyi\,,\, fzi) \quad ; \quad Fj = (fxj\,,\, fyj\,,\, fzj)$$

$$fx\,i = T \times \frac{xj - xi}{L} \quad ; \quad fy\,i = T \times \frac{yj - yi}{L} \quad ; \quad fz\,i = T \times \frac{zj - zi}{L}$$

$$fx\,j = -fx\,i \quad ; \quad fy\,j = -fy\,i \quad ; \quad fz\,j = -fz\,i$$

$$L = \sqrt{(xj - xi)^2 + (yj - yi)^2 + (zj - zi)^2}$$

Prestando atención, apreciaremos que partimos de la misma base que el tradicional método de “densidad de fuerza” tan exitoso y utilizado extensamente.

$$fx\,i = \frac{T}{L} \times (xj - xi) \quad ; \quad fy\,i = \frac{T}{L} \times (yj - yi) \quad ; \quad fz\,i = \frac{T}{L} \times (zj - zi)$$

El sistema de ecuaciones para las tres componentes de la fuerza nodal es, como se puede apreciar, no-lineal.

El método de “densidad de fuerza” resuelve elegantemente dicha problemática y decide establecer un parámetro constante para le cociente entre la tensión T de la barra y la longitud de la misma. De esta forma las ecuaciones solo dependen de las coordenadas de cada nodo y por tanto el sistema de ecuaciones de equilibrio queda simplificado a un sistema lineal de solución directa.

Las ventajas de dicho método esta en la resolución inmediata del sistema de ecuaciones con computadoras básicas propias del momento en que este método fue desarrollado.

La limitación del mismo esta basada en que la tensión final de los elementos que componen la estructura esta ligado linealmente con la longitud final de dicho elemento. Para sistemas elementales esto no seria un gran inconveniente, pero debido a la necesidad de hacer compatibles las geometrías de equilibrio de las estructuras, trabajando a fuerza axil, con elementos de cubrición de formas regulares, generan la situación en que muchas veces ya no es suficiente con encontrar una geometría en equilibrio, sino que también hace falta exigirle a tal geometría una regularidad que resuelva problemas de compatibilidad constructiva entre los distintas partes que componen la solución arquitectónica.

Métodos iterativos basados en el de “densidad de fuerza” fueron desarrollados modificando las distintas relaciones de T/L para forzar a la solución conseguir ciertos requerimientos geométricos. Como complemento al método de “densidad de fuerza” podríamos aceptar tal estrategia como valida. Con la actual evolución de las computadoras y la capacidad de calculo que presentan en estos momentos, nos encontramos con la realidad de que ya es posible abordar directamente el problema no-lineal directamente sin la necesidad de establecer simplificaciones que limitan el espectro de soluciones obtenidas.

Para nuestro caso en concreto, partimos de la base de que las variables del problema son las seis coordenadas de los dos nodos que conectan el elemento lineal, mas la tensión interna del mismo. De esta forma no realizamos ninguna simplificación y trabajamos con toda la complejidad del problema.

Esta estrategia nos dará un mayor rango de posibilidades de soluciones entre las que podremos optar por la que mejor se acerque a la forma que busquemos.

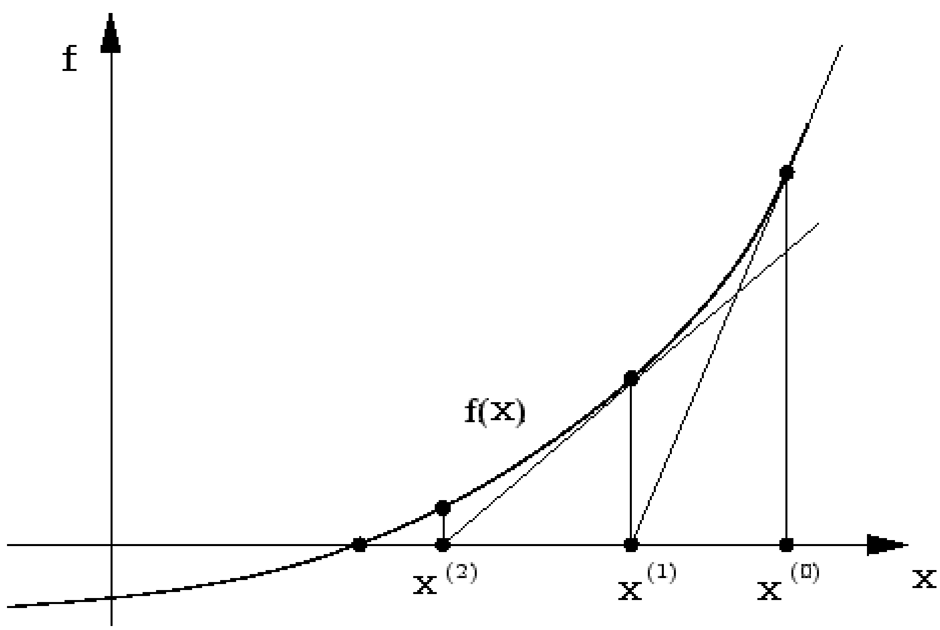
Métodos como el de Newton-Raphson para la solución del sistema de ecuaciones no-lineales han demostrado tener total eficacia en su aplicación.

5. El método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson para el problema de una sola variable parte de un concepto bastante elemental. Es simplemente una relación trigonométrica que permite ir aproximándose a los ceros cercanos de la función mediante operaciones iterativas lineales.

$$(x_n - x_{(n+1)}) \times f'(x_n) = f(x_n) \qquad \Rightarrow \qquad x_{(n+1)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Estas ecuaciones lo que nos demuestran es que empezando para un valor cualquiera de *x*, podemos ir aproximándonos a $f_{(x)}$=0 iterativamente simplemente calculando el valor de la derivada de la función en cada instante y operando.



Este principio se aplica perfectamente al problema de múltiples variables simplemente calculando las derivadas parciales de la función respecto a cada uno de sus parámetros $f_{(x,y,z,T)}$.

De esta forma hemos conseguido simplificar un problema de resolución de ecuaciones no-lineales a un proceso iterativo de resolución de ecuaciones lineales fácilmente abordables mediante el álgebra matricial.

6. Matriz de rigidez del elemento lineal

El concepto de matriz de rigidez se desarrolla como una combinación de parámetros que describen la variación del valor de las fuerzas que los elementos introducen en los nodos, en función de las variables del problema, que en nuestro caso son, las seis coordenadas de sus dos nodos que lo definen y el valor de la tensión en el elemento lineal; $f(xi,yi,zi,xj,yj,zj,T)$.

$$\begin{pmatrix} dfxi \\ dfyi \\ dfzi \\ \\ dfxj \\ dfyj \\ dfzj \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial fxi}{\partial xi} & \frac{\partial fxi}{\partial yi} & \frac{\partial fxi}{\partial zi} & \frac{\partial fxi}{\partial xj} & \frac{\partial fxi}{\partial yj} & \frac{\partial fxi}{\partial zj} & \frac{\partial fxi}{\partial T} \\ \frac{\partial fyi}{\partial xi} & \frac{\partial fyi}{\partial yi} & \frac{\partial fyi}{\partial zi} & \frac{\partial fyi}{\partial xj} & \frac{\partial fyi}{\partial yj} & \frac{\partial fyi}{\partial zj} & \frac{\partial fyi}{\partial T} \\ \frac{\partial fzi}{\partial xi} & \frac{\partial fzi}{\partial yi} & \frac{\partial fzi}{\partial zi} & \frac{\partial fzi}{\partial xj} & \frac{\partial fzi}{\partial yj} & \frac{\partial fzi}{\partial zj} & \frac{\partial fzi}{\partial T} \\ \\ \frac{\partial fxj}{\partial xi} & \frac{\partial fxj}{\partial yi} & \frac{\partial fxj}{\partial zi} & \frac{\partial fxj}{\partial xj} & \frac{\partial fxj}{\partial yj} & \frac{\partial fxj}{\partial zj} & \frac{\partial fxj}{\partial T} \\ \frac{\partial fyj}{\partial xi} & \frac{\partial fyj}{\partial yi} & \frac{\partial fyj}{\partial zi} & \frac{\partial fyj}{\partial xj} & \frac{\partial fyj}{\partial yj} & \frac{\partial fyj}{\partial zj} & \frac{\partial fyj}{\partial T} \\ \frac{\partial fzj}{\partial xi} & \frac{\partial fzj}{\partial yi} & \frac{\partial fzj}{\partial zi} & \frac{\partial fzj}{\partial xj} & \frac{\partial fzj}{\partial yj} & \frac{\partial fzj}{\partial zj} & \frac{\partial fzj}{\partial T} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dxi \\ dyi \\ dzi \\ \\ dxj \\ dyj \\ dzj \\ \\ dT \end{pmatrix}$$

De la formulación de la matriz de rigidez anterior, podemos observar que conseguimos una matriz no-cuadrada de 6 filas por 7 columnas para cada elemento lineal que conforman la estructura.

7. Matriz global de la estructura

La clave de este método de búsqueda de forma se basa en el resultado obtenido a la hora de ensamblar las matrices de rigideces de los elementos lineales que componen la estructura en la matriz global del sistema.

Si prestamos atención a la base del método matricial de calculo de estructuras, podremos rápidamente reconocer que las matrices de rigideces de los elementos son matrices cuadradas, que al ensamblarlas en la matriz global de la estructura, consigue otra matriz cuadrada que permite la resolución del sistema de forma directa sin la necesidad de tener que aportar mas ecuaciones al mismo.

En este método de búsqueda de forma, en que la tensión interna del elemento esta desacoplada de los desplazamientos de los nodos, consigue que, al ser las matrices de rigideces de los elementos no cuadradas, con más columnas que filas, la matriz de rigidez global de la estructura sea un sistema indeterminado, ya que faltaran ecuaciones que completen el sistema. Precisamente nos faltaran el mismo numero de ecuaciones que el de elementos lineales tenga la estructura.

Esta es la clave de este método de búsqueda de forma ya que las ecuaciones que agreguemos serán las que utilizaremos para condicionar a la geometría hacia los requerimientos de nuestro problema concreto.

En el ejemplo siguiente se detalla la matriz de rigidez global de la estructura de *n* nodos y *m* elementos lineales:

$$\begin{pmatrix} df_0 \\ df_1 \\ \dots \\ df_n \\ \\ C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kN_{00} & kN_{01} & \dots & kN_{0n} & kT_{00} & kT_{01} & \dots & kT_{0m} \\ kN_{10} & kN_{11} & \dots & kN_{1n} & kT_{10} & kT_{11} & \dots & kT_{1m} \\ & & & \dots & & & & \\ kN_{n0} & kN_{n1} & \dots & kN_{nn} & kT_{n0} & kT_{n1} & \dots & kT_{nm} \\ \\ \multicolumn{8}{c}{(Ecuacion\ de\ forma)_0} \\ \multicolumn{8}{c}{(Ecuacion\ de\ forma)_1} \\ \multicolumn{8}{c}{\dots} \\ \multicolumn{8}{c}{(Ecuacion\ de\ forma)_m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \\ \\ dT_0 \\ dT_1 \\ \dots \\ dT_m \end{pmatrix}$$

8. Ecuaciones de forma

Tal y como se ha comentado anteriormente, la estrategia de desvincular la fuerza de los elementos en relación a los desplazamientos de los nodos, nos permite la posibilidad de agregar tantas ecuaciones como elementos tenga la estructura para conseguir un sistema de ecuaciones compatible determinado. Estas ecuaciones serán las que nos permitirán exigirle a la estructura los condicionantes geométricos que nos interesen.

Los distintos tipos de ecuaciones que utilicemos están solo condicionadas por la capacidad creativa que se tenga a la hora de abordar el problema.

Una limitación de este método es la especial atención que hay que presentar para que las ecuaciones no sean combinación lineal entre ellas. Este es un concepto muy evidente pero no lo es tanto a la hora de abordar problemas complejos difíciles de intuir con antelación.

Como ejemplo de ecuaciones de forma a agregar en la matriz global de la estructura tenemos:

1- Condicionamiento de desplazamientos.
2- Condicionamiento de la longitud de un elemento o grupo de estos.
3- Condicionamiento de la fuerza interna de un elemento o grupo de ellos.
4- Relación entre longitudes de elementos.
5- Relación entre las fuerzas de elementos.
6- Posiciones relativas de nodos en función de otro nodo.
7- etc...

9. Calculo de la rigidez de las ecuaciones de forma

Para introducir el condicionante de forma en la matriz global de la estructura utilizamos un método genérico equivalente al del cálculo de la rigidez del elemento en función de las coordenadas de sus nodos y la fuerza interna.

Sea cual sea la función de forma que deseemos agregar a la matriz de rigidez global de la estructura, lo que debemos calcular son las derivadas parciales de tal función respecto a sus parámetros e introducir dichos coeficientes en las posiciones de la matriz global que correspondan.

Supongamos el ejemplo de condicionamiento de la distancia entre dos nodos de la estructura *(i , j)*.

$$Lij = \sqrt{(xj - xi)^2 + (yj - yi)^2 + (zj - zi)^2}$$

$$dLij = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Lij}{\partial xi} & \dfrac{\partial Lij}{\partial yi} & \dfrac{\partial Lij}{\partial zi} & \dfrac{\partial Lij}{\partial xj} & \dfrac{\partial Lij}{\partial yj} & \dfrac{\partial Lij}{\partial zj} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dxi \\ dyi \\ dzi \\ dxj \\ dyj \\ dzj \end{pmatrix}$$

De esta forma vamos calculando las sucesivas ecuaciones de forma que apliquemos al caso en concreto y completamos la matriz global de la estructura hasta que obtengamos un sistema compatible determinado posible de resolver.